数理解析研究所講究録
第2030巻 2017年 55-62

Stochastic differential equations for infinite particle systems of jump types with long range interactions

九州大学大学院数理学研究院　江崎 翔太*
Syota Esaki
Faculty of Mathematics, Kyushu university

千葉大学大学院理学研究科　種村 秀紀†
Hideki Tanemura
Faculty of Science, Chiba University

1 序

相互作用をもつ無限粒子系の時間発展 (確率力学) の解析は, これまでに様々な設定で盛んに行われてきた. 相互作用を与えるポテンシャル関数が遠方で早く減衰する場合は短距離相互作用と呼ばれ, 減衰が多項式的であったり, 無限遠で発散する対数ポテンシャル (2次元クーロンポテンシャル) などは長距離相互作用と呼ばれているが, 粒子系の振る舞いは短距離作用素であるか長距離作用素であるかによって大きく異なる. この講究録では, ランダム行列に由来するモデルである Ginibre, Dyson, Airy 点過程などに付随する確率力学を含む長距離相互作用系について扱うことにする.

相互作用をもつ無限粒子系 (干渉無限粒子系) の構成については, 多数の研究が存在する. その中で Dirichlet 形式を用いる構成が, 干渉 Brown 運動に対しては, Osada [5] により最初に厳密に行われ, そして [8] において, 正準 Gibbs 測度の真の拡張である準 Gibbs 測度を導入することによって, Ginibre, Dyson 点過程に付随する系に対して行われた. さらに [9, 2] において, 同じく対数ポテンシャルで相互作用する Airy 点過程, Bessel 点過程も準 Gibbs 測度であることが示され, 付随する系が構成された. 一方で, 干渉飛躍型過程の構成は, Kondratiev-Lytvynov-Röckner [3], Lytvynov-Ohlerich [4] などで扱われているが, 対数ポテンシャルで相互作用する飛躍型無限粒子系の構成は行われていなかった. Esaki [1] は, 最近, 準 Gibbs 測度に付随する配置空間上の干渉飛躍型無限粒子系の構成をパラメータ α $(0<\alpha<2)$ に対する干渉 α-安定過程系を例として含む形で行った.

長距離干渉 Brown 粒子系の無限次元確率微分方程式 (ISDE) に関しては, 長田氏らにより一連の研究として行われており, 配置空間上の過程として得られているものに対応するラベル付け過程を構成 [6], 対数微分を用いることでの ISDE 表示 [7], ある種の近似スキームを用いての ISDE の強解の存在性と一意性 [10] という順で理論は展開されている. 我々

*s-esaki@math.kyushu-u.ac.jp
†tanemura@math.s.chiba-u.ac.jp

は上述の流れに沿って, 飛躍型の長距離相互作用系に対して, ISDE 表示を与え, その強解の存在性と一意性の研究を行った. 本論文ではその概説を行う.

以下, 講究録の構成を述べる. 第2節では主結果を述べるために必要となる事柄の準備を行う. 第3節ではラベル付け過程の構成と, 得られたラベル付け過程と配置空間上の過程に関する両立性について述べる. 第4節では第3節で得られたラベル付け過程を用いて, 各粒子が従う ISDE を与える. 第5節では第4節で与えられた ISDE を含む一般の ISDE に対して強解の存在と一意性について議論し, その応用として相互作用系の ISDE に対する強解の存在と一意性について述べる.

2 準備

以下, 記号の準備を行う. $S=\mathbb{R}^d$ を粒子が動く状態空間を表す.

$$\mathfrak{M}=\{\xi;\xi \text{ は非負整数値 Radon 測度}\}$$

とし, 配置空間とよび, $\mathfrak{M}$ の元 ξ を配置とよぶ. 非負整数値 Radon 測度は一般にディラックデルタ測度を用いて $\xi=\sum_i \delta_{x_i}$ とかくことができる. 従って, このデルタ測度の台1つ1つに粒子を1つずつおくことで, ξ は S 上の粒子の配置と自然に同一視することができる. このことが, 上述の $\mathfrak{M}$ を配置空間と考える理由である. $\mathfrak{M}$ は漠位相を導入することでポーランド空間であることが知られている. さらに $\mathfrak{M}$ の部分空間として,

$$\mathfrak{M}_{\mathrm{s.i.}}=\{\xi\in\mathfrak{M}:\xi(\mathbb{R}^d)=\infty, \text{任意の } x\in\mathbb{R}^d \text{ に対し } \xi(\{x\})\le 1\}$$

を導入する. $U_r=\{x\in S;|x|\le r\}$ とし, 配置に対する射影 $\pi_r,\pi_r^c:\mathfrak{M}\to\mathfrak{M}$ をそれぞれ $\pi_r(\xi)=\xi(\cdot\cap U_r)$, $\pi_r^c(\xi)=\xi(\cdot\cap U_r^c)$ と定義する. $\mathfrak{D}_\circ=\{f:\mathfrak{M}\to\mathbb{R}; f \text{ は局所的, かつ, 滑らか}\}$ とする, ただし, $f:\mathfrak{M}\to\mathbb{R}$ が局所的であるとは, ある $r\in\mathbb{N}$ で f が $\sigma[\pi_r]$-可測となるものが存在することを, 滑らかであるとは f を粒子の位置を成分とする関数として表現したときにその表現が滑らかであることをいう.

以下で点過程に関する記号を導入する. $\mathfrak{M}$ 上の確率測度 μ を S 上の点過程とよぶ. μ に対し $\mathbf{s}_k=(s_1,\ldots,s_k)$ で条件付けた縮約 Palm 測度 $\mu_{\mathbf{s}_k}$ を

$$\mu_{\mathbf{s}_k}(\cdot)=\mu\left(\cdot-\sum_{j=1}^{k}\delta_{s_j}\,\middle|\,\text{任意の } j=1,\ldots,k \text{ に対し } \xi(s_j)\ge 1\right)$$

で定義する. $\mathfrak{M}\times S^k$ 上の k-Campbell 測度 μ^k を

$$\mu^k(A\times B)=\int_B \mu_{\mathbf{s}_k}(A)\rho^k(\mathbf{s}_k)d\mathbf{s}_k$$

で定義する. ここで ρ^n は μ の n-相関関数である. また, $\rho^n_{\mathbf{s}_k}(x)$ で縮約 Palm 測度 $\mu_{\mathbf{s}_k}$ の n-相関関数を表すものとする. 次に, $\mathfrak{M}_r^i=\{\xi(U_r)=i\}$ とする. このとき, U_r^k 上の k-密度関数 σ_r^k を, 対称関数 $\sigma_r^i:U_r^i\to\mathbb{R}^+$ で, 任意の $\sigma[\pi_r]$-可測有界関数 $f:\mathfrak{M}\to\mathbb{R}$ に対し

$$\frac{1}{i!}\int_{U_r^i} f_r^i\sigma_r^i dx=\int_{\mathfrak{M}_r^i} f d\mu$$

をみたすものと定義する. ただし, $f_r^i:U_r^i\to\mathbb{R}$ は対称関数で $\xi\in\mathfrak{M}_r^i$ に対し $f_r^i(\boldsymbol{x}(\xi))=f(\xi)$ となるもの, $\boldsymbol{x}$ は ξ の U_r 内の粒子の位置を座標で表す表現である.

以下で我々の無限粒子系の平衡分布を記述する準ギブス測度を導入する. 点過程 μ に対して, 条件付き測度 $\mu_{r,\eta}^m$ を $\mu_{r,\eta}^m(\cdot)=\mu(\pi_r(\xi)\in\cdot|\xi(U_r)=m,\pi_r^c(\xi)=\pi_r^c(\eta))$ と定義する. $\Psi:S\to\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ を相互作用ポテンシャルとし, $\mathcal{H}_r=\sum_{s_i,s_j\in U_r,i<j}\Psi(s_i-s_j)$ とする.

定義 2.1 (準 Gibbs 測度). μ が Ψ-準 Gibbs 測度であるとは, r, η, m に依存する定数 $c_{r,\eta}^{m}$ が存在し,

$$c_{r,\eta}^{m\ -1} e^{-\mathcal{H}_r} d\Lambda_r^m \leq \mu_{r,\eta}^m \leq c_{r,\eta}^m e^{-\mathcal{H}_r} d\Lambda_r^m$$

となることをいう. ここで, Λ_r を強度 $\mathbf{1}_{U_r} dx$ の Poisson 点過程に対し, $\Lambda_r^m = \Lambda_r(\cdot | \xi(U_r) = m)$ とする.

注意 2.2. (1) 正準 Gibbs 測度は, 準 Gibbs 測度である.
(2) Dyson, Ginibre, Airy, Bessel 点過程は相互作用ポテンシャルが対数ポテンシャルで与えられることから正準 Gibbs 測度ではないが, 準 Gibbs 測度である [8, 9, 2].

次に, 配置空間上の過程に対応する双線形形式 $(\mathfrak{E}, \mathfrak{D}_\infty)$ を定義する. $f, g \in \mathfrak{D}_\circ$ に対し, $\mathbb{D}[f,g] : \mathfrak{M} \to \mathbb{R}$ を次のように定義する:

$$\mathbb{D}[f,g](\xi) = \frac{1}{2} \sum_i \int_S (f(\xi^{s_i,y}) - f(\xi))(g(\xi^{s_i,y}) - g(\xi)) p(|s_i - y|) dy$$

ただし, $s_i \in S$, $\xi = \sum_i \delta_{s_i}$, $\xi^{s_i,y_i} = \xi + \delta_{y_i} - \delta_{s_i}$ とし, p は有限または無限の測度の密度関数であり, 次の条件をみたす:
(p.1) $r \to \infty$ で, ある $0 < \alpha < 2$ に対し $p(r) = O(r^{-(d+\alpha)})$
(p.2) $r \to +0$ で, ある $0 < \gamma < 2$ に対し $p(r) = O(r^{-(d+\gamma)})$
これら (p.1) と (p.2) の条件のもとでは $\int_S (1 \wedge |y-x|^2) p(|x-y|) dy < \infty$ がみたされることを注意する. そして, $\mathfrak{E}$ と $\mathfrak{D}_\infty$ をそれぞれ

$$\mathfrak{E}(f,g) = \int_{\mathfrak{M}} \mathbb{D}[f,g](\xi) d\mu, \quad f, g \in \mathfrak{D}_\infty$$

$$\mathfrak{D}_\infty = \{f \in \mathfrak{D}_\circ \cap L^2(\mathfrak{M}, \mu); \mathfrak{E}(f,f) < \infty\}$$

と定義する.
以下で, いくつかの仮定を導入する.
(A.1) μ は上半連続な Ψ に対する Ψ-準 Gibbs 測度とする.
(A.2) 任意の $r, k \in \mathbb{N}$ に対し, $\sigma_r^k \in L^2(U_r^k, dx)$ である.
(A.3) 任意の $r \in \mathbb{N}$ に対し $\sum_{i=1}^{\infty} i\mu(\mathfrak{M}_r^i) < \infty$ である.
これら (A.1)–(A.3) の仮定は干渉ブラウン粒子系の構成においても仮定されていたものであり, 広く適用可能な緩い仮定である. 干渉飛躍型過程を構成するために, さらにいくつかの仮定を導入する.
(A.4) $|x| \to \infty$ で, ある $0 \leq \kappa < \alpha$ となる κ に対し $\rho^1(x) = O(|x|^\kappa)$ となる.
(A.5) $r \to \infty$ で, ある $\delta > 0$ に対し $\frac{\mathrm{Var}^\mu[\xi(U_r)]}{(\mathbb{E}^\mu[\xi(U_r)])^2} = O(r^{-\delta})$ となる.

注意 2.3. μ が Poisson 点過程, または, 行列式点過程である場合には (A.5) はみたされる.

まず, 次の命題を示すことができる.

命題 2.4. (A.1) を仮定する. このとき, $(\mathfrak{E}, \mathfrak{D}_\infty)$ は $L^2(\mathfrak{M}, \mu)$ 上で可閉である.

従って, $(\mathfrak{E}, \mathfrak{D})$ を $((\mathfrak{E}, \mathfrak{D}_\infty), L^2(\mathfrak{M}, \mu))$ の閉包とおく. この閉包に対して次の定理を示すことができる.

定理 2.5 ([1]). (p.1)–(p.2) と (A.1)–(A.5) を仮定する. このとき, $(\mathfrak{E}, \mathfrak{D})$ は $L^2(\mathfrak{M}, \mu)$ 上の準正則ディリクレ形式となる. 従って, $((\mathfrak{E}, \mathfrak{D}), L^2(\mathfrak{M}, \mu))$ に付随する特別標準過程 $(\Xi(t), \{\mathbb{P}_\xi\}_{\xi \in \mathfrak{M}})$ が存在する. さらに, 過程 $\Xi(t)$ は不変測度 μ に対して可逆である.

例 2.6. (1) μ が Dyson 点過程, または, Ginibre 点過程とする. これらは平行移動不変な準 Gibbs 測度である ([8] を参照). 従って, 仮定 (A.4) の κ は $\kappa = 0$ としてみたされるため, 飛躍率の指数 α は制限を受けない. 従って, 定理 2.5 により, $0 < \alpha < 2$ に対する干渉 α-安定過程系を構成できる.
(2) μ が Airy 点過程とする. これは準 Gibbs 測度であり ([9] を参照), $x \to -\infty$ で $\rho^1(x) = O(|x|^{1/2})$ となる. 従って, 仮定 (A.4) の κ は $\kappa = \frac{1}{2}$ としてみたされるため, 飛躍率の指数 α は κ によって制限を受ける. 従って, 定理 2.5 により, $\frac{1}{2} < \alpha < 2$ に対する干渉 α-安定過程系を構成できる.

3 ラベル付け過程と両立性

ラベル付け過程に関連する双線形形式を導入する. $k \in \mathbb{N}$ とする. $\phi, \psi \in C_0^\infty(S^k)$ に対して, 次の 2 次形式を定義する.

$$\nabla^{[k]}[\phi, \psi](\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k}\int_S (\phi(\boldsymbol{x}^{x_i,y}) - \phi(\boldsymbol{x}))(\psi(\boldsymbol{x}^{x_i,y}) - \psi(\boldsymbol{x}))p(|x_i - y|)dy$$

ここで, $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_k)$ に対し $\boldsymbol{x}^{x_i,y} = (x_1, \ldots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \ldots, x_k)$ とする. また, $f, g \in \mathfrak{D}_\circ \otimes C_0^\infty(S^k)$ に対して

$$\mathbb{D}^k[f,g](\xi, \boldsymbol{x}) := \mathbb{D}[f(\cdot, \boldsymbol{x}), g(\cdot, \boldsymbol{x})](\xi) + \nabla^{[k]}[f(\xi, \cdot), g(\xi, \cdot)](\boldsymbol{x})$$

と定義する. この $\mathbb{D}^k$ を用いて, 以下のように $\mathfrak{E}^k$ と $\mathfrak{D}^k_\infty$ をそれぞれ定義する.

$$\mathfrak{E}^k(f,g) = \int_{\mathfrak{M}\times S^k} \mathbb{D}^k[f,g](\xi, \boldsymbol{x})\mu^k(d\xi d\boldsymbol{x}),$$

$$\mathfrak{D}^k_\infty = \{f \in \mathfrak{D}_\circ \otimes C_0^\infty(S^k) \cap L^2(\mathfrak{M} \times S^k, \mu^k); \mathfrak{E}^k(f,f) < \infty\}.$$

ここで, さらに仮定をおく.
(A.4.k) 任意の $\mathbf{s}_k \in S^k$ に対して, $|x| \to \infty$ で $\rho^1_{\mathbf{s}_k}(x) = O(|x|^\kappa)$ となる.
(A.5.k) 任意の $\mathbf{s}_k \in S^k$ に対し $r \to \infty$ で $\frac{\mathrm{Var}^{\mu_{\mathbf{s}_k}}[\xi(U_r)]}{\left(\mathbb{E}^{\mu_{\mathbf{s}_k}}[\xi(U_r)]\right)^2} = O\left(r^{-\delta}\right)$ となる.
(A.6) ほとんど全ての $\mathbf{x}_k$ と $\mathbf{y}_k$ に対して $\mu_{\mathbf{x}_k}$ と $\mu_{\mathbf{y}_k}$ は互いに絶対連続である.

注意 3.1. (1) μ が Poisson 点過程か行列式点過程である場合には (A.5.k) はみたされる.
(2) μ が行列式点過程で, $x \to \infty$ のとき核関数 $K(x,y) \to 0$ となり, (A.4) がみたされるとする. このとき, (A.4.k) もみたされる.

前述の命題 2.4, 定理 2.5, 系 に対応する事実を $(\mathfrak{E}^k, \mathfrak{D}^k_\infty)$ に対しても示すことができる.

命題 3.2. (A.1), (B.5) を仮定する. このとき, $(\mathfrak{E}^k, \mathfrak{D}^k_\infty)$ は $L^2(\mathfrak{M} \times S^k, \mu^k)$ 上可閉である.

$(\mathfrak{E}^k, \mathfrak{D}^k)$ を $((\mathfrak{E}^k, \mathfrak{D}^k_\infty), L^2(\mathfrak{M} \times S^k, \mu^k))$ の閉包とする. このとき次の定理が成立する.

定理 3.3 (E.-Tanemura). (p.1)–(p.2) と (A.1)–(A.6), (A.4.k), (A.5.k) を仮定する. このとき, 任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して, $(\mathfrak{E}^k, \mathfrak{D}^k)$ は $L^2(\mathfrak{M}\times S^k, \mu^k)$ 上の準正則ディリクレ形式である. よって, $((\mathfrak{E}^k, \mathfrak{D}^k), L^2(\mathfrak{M}\times S^k, \mu^k))$ に付随する特別標準過程 $((\Xi^\circ_k(t), \mathbf{X}^k(t)), \{\mathbb{P}_{(\xi,\mathbf{x})}\}_{(\xi,\mathbf{x})\in\mathfrak{M}\times S^k})$ が存在する.

定理 2.5 と定理 3.3 によって, それぞれ $\mathfrak{M}$ 値と $\mathfrak{M}\times S^k$ 値の特別標準過程が得られた. さらに, 以下の自然な仮定を課す.
(A.7) $\{X_j(t)\}$ は互いに非衝突である.
(A.8) $\{X_j(t)\}$ は同時に飛躍が起きない.
(A.9) それぞれの粒子 $X_j(t)$ は爆発しない.

定理 3.4 (E. -Tanemura). (p.1)–(p.2) と (A.1)–(A.9), (A.4.k), (A.5.k) を仮定する. 特別標準過程 $((\Xi_k^\diamond(t),\mathbf{X}^k(t)))$ は両立性をもつ. つまり, 任意の $k\in\mathbb{N}$ に対し $((\Xi_k^\diamond(t),\mathbf{X}^k(t)))$ と $((\Xi_{k+1}^\diamond(t)+\delta_{X_{k+1}^{k+1}(t)},(X_1^{k+1}(t),\ldots,X_k^{k+1}(t)))$ の分布は等しい.

この両立性より, $(\mathfrak{E},\mathcal{D})$ に付随する配置空間上の過程 $\Xi(t)$ に対して, 道のラベル写像 $\ell_{\mathrm{path}}(\Xi)=(X_j)_{j=1}^\infty$ が定義できる. そして $\Xi(t)=\sum_{j=1}^\infty\delta_{X_j(t)}$ が成り立つ.

注意 3.5. μ が平行移動不変であるとき (A.9) は成立する. また, $\int_S|x|\rho^1(x)p(|x|)dx<\infty$ が成立するとき, (A.9) が成立する.

4　確率微分方程式表現

干渉 Brown 粒子系の ISDE 表現を得るときに用いられた対数微分を基に, 我々の ISDE を与えるために関数 d_ϕ^μ を導入する. $\phi\in C_0^\infty(S)$ とし, 関数 $d_\phi^\mu(\xi,x):\mathfrak{M}\times S\to S$ を

$$-\mathfrak{E}^1(f,\phi(x))=\int_{\mathfrak{M}\times S}f(\xi,x)d_\phi^\mu(\xi,x)\mu^1(d\xi dx).$$

をみたすものとする. 適切な条件のもと, d_ϕ^μ は次のような具体形を求めることができる:

$$d_\phi^\mu(\xi,x)=\int_S dyp(|y-x|)(\phi(y)-\phi(x))\left[1+\frac{d\mu_y}{d\mu_x}(\xi)\frac{\rho(y)}{\rho(x)}\right]$$

ここで $c(\xi,x;y)=p(|y-x|)\left[1+\frac{d\mu_y}{d\mu_x}(\xi)\frac{\rho^1(y)}{\rho^1(x)}\right]$ とおく.

$A^{[\phi]}(t)=\phi(X_1(t))-\phi(X_1(0))$ とかくと, $A^{[\phi]}(t)$ は加法的汎関数であるため, 福島分解によって $A^{[\phi]}(t)=N^{[\phi]}(t)+M^{[\phi]}(t)$ と分解できる, ただし, $N^{[\phi]}$ はエネルギー零項, $M^{[\phi]}$ はマルチンゲール項である. $\mathfrak{E}^1$ により, $N^{[\phi]}$ は計算できる. 実際, $\Xi^{(1)}(t)=\sum_{j=2}^\infty\delta_{X_j(t)}$, $a(u,r,X_j(s),\Xi^{(1)}(s))=\mathbf{1}\left(0\le r\le c(\Xi^{(1)}(s),X_1(s),X_1(s)+u)\right)$ とかくと,

$$\begin{aligned}N^{[\phi]}(t)&=\int_0^t d_\phi^\mu(\Xi^{(1)}(s-),X_1(s-))ds\\&=\int_0^t ds\int_S du\int_0^\infty dr\{\phi(X_1(s-)+u)-\phi(X_1(s-))\}a(u,r,X_j(s-),\Xi^{(1)}(s-))\end{aligned}$$

となる. 従って, このことから,

$$\begin{aligned}M^{[\phi]}(t)&=\int_0^t\int_S\int_0^\infty M_1(dsdudr)\{\phi(X_1(s-)+u)-\phi(X_1(s-))\}a(u,r,X_j(s-),\Xi^{(1)}(s-)),\\A^{[\phi]}(t)&=\int_0^t\int_S\int_0^\infty N_1(dsdudr)\{\phi(X_1(s-)+u)-\phi(X_1(s-))\}a(u,r,X_j(s-),\Xi^{(1)}(s-))\end{aligned}$$

となる．ここで，$N_1(dsdudr)$ は $[0,\infty)\times S\times[0,\infty)$ 上の強度 $dsdudr$ の Poisson 点過程とし，$M_1(dsdudr)=N_1(dsdudr)-dsdudr$ とする．$L>0$ とする．$\phi_L^j\in C_0^\infty(S)$ を $x^j\in[-L,L]$ に対して $\phi_L^j(x)=x^j$ となるものとする，ただし $x=(x^1,\ldots,x^d)$ とする．この ϕ_L^j に対して上述の議論を考えると，$\tau_L=\inf_{t>0}\{X_t>L\}$ に対して，τ_L までの $A^{[x_j]}$ の分解 $A_{\tau_L}^{[x_j]}=N_{\tau_L}^{[x_j]}+M_{\tau_L}^{[x_j]}$ を与えることができる．この後 $L\to\infty$ という極限を考えることで次の結果が得られる．$\mathsf{u}:S^{\mathbb{N}}\to\mathfrak{M}$ は $\mathsf{u}((s_j))=\sum_j\delta_{s_j}$ となるものとする．

定理 4.1 (E. -Tanemura)**.** (p.1)–(p.2) と (A.1)–(A.9)，任意の $k\in\mathbb{N}$ に対し (A.4.k)，(A.5.k) がみたされていると仮定する．このとき，ある $\mathfrak{M}_0\subset\mathfrak{M}$ で，次のことが成り立つものが存在する: $\mu(\mathfrak{M}_0)=1$ をみたし，任意の $\boldsymbol{x}\in\mathsf{u}^{-1}(\mathfrak{M}_0)$ に対し，

$$dX_j(t)=\int_{S\times[0,\infty)}N_j(dtdudr)ua(u,r,X_j(s-),\Xi^{(1)}(s-)),\quad (X_j(0))_{j\in\mathbb{N}}=\boldsymbol{x},$$

任意の t に対し $\boldsymbol{X}(t)\in\mathsf{u}^{-1}(\mathfrak{M}_0)$ となる解 $\boldsymbol{X}(t)=(X_j(t))$ が存在する．ここで，$\boldsymbol{N}=(N_j)_{j\in\mathbb{N}}$ は独立な強度 $dsdudr$ の *Poisson* 点過程である．

5 ISDE の強解

$T\in\mathbb{N}$, $\boldsymbol{S}=S^{\mathbb{N}}$ とし，$\boldsymbol{W}=D([0,T];\boldsymbol{S})$，$\boldsymbol{W}^{\mathrm{sol}}$ を $\boldsymbol{W}$ の Borel 部分集合とする．関数 $a:\mathbb{R}^d\times[0,\infty)\times\boldsymbol{W}^{\mathrm{sol}}\to D([0,\infty);S)$ を $a(u,r,\cdot)$ が predictable となるものとする．このとき，次の一般的な ISDE を考える．

$$dX_j(t)=\int_{\mathbb{R}^d\times[0,\infty)}a(u,r,\boldsymbol{X})_tN_j(dudrdt),\quad \boldsymbol{X}\in\boldsymbol{W}_{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{sol}}=\{\boldsymbol{X}\in\boldsymbol{W}^{\mathrm{sol}}:\boldsymbol{X}_0=\boldsymbol{x}\}\tag{5.1}$$

まず，次のことを仮定する．
(B.1) (5.1) は解 $\boldsymbol{X}$ をもつ．
$\boldsymbol{X}\in\boldsymbol{W}$ と $m\in\mathbb{N}$ に対して，$\boldsymbol{X}^m=(X_1,X_2,\ldots,X_m)$，$\boldsymbol{X}^{m*}=(X_{m+1},X_{m+2},\ldots)$ とする．与えられた $\boldsymbol{X}\in\boldsymbol{W}_{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{sol}}$ に対して $(\mathbb{R}^d)^m$ 上の $\boldsymbol{Y}^m=(Y_1^m,Y_2^m,\ldots,Y_m^m)$ に関する次の SDE を考える:

$$dY_j^m(t)=\int_{\mathbb{R}^d\times[0,\infty)}a(u,r,(\boldsymbol{Y}^m,\boldsymbol{X}^{m*}))N_j(dudrdt),\quad (\boldsymbol{Y}^m,\boldsymbol{X}^{m*})\in\boldsymbol{W}_{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{sol}}\tag{5.2}$$

以下，列 $(\boldsymbol{Y}^m)_{m\in\mathbb{N}}$ を ISDE (5.1) に付随する有限次元 SDE の無限系という．この系に関して次のことを仮定する．
(B.2) 任意の $\boldsymbol{X}\in\boldsymbol{W}_{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{sol}}$ について，それぞれの $m\in\mathbb{N}$ に対し SDE (5.2) が強解 $\boldsymbol{Y}^m$ をもち，道ごとの一意性が成立する．
このとき $F_{\boldsymbol{x}}^m(\boldsymbol{X},\boldsymbol{N})=(\boldsymbol{Y}^m,\boldsymbol{X}^{m*})=(Y_1^m,\ldots,Y_m^m,X_{m+1},\ldots)$ とおく．

定義 5.1 (IFC 解)**.** $\boldsymbol{W}\times\boldsymbol{W}_0$ 上の確率測度 $\bar{P}_{\boldsymbol{x}}$ が ISDE (5.1) に対する IFC 解であるとは $\bar{P}_{\boldsymbol{x}}$ が次のことをみたすときにいう:

- $\bar{P}_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{W}_{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{sol}}\times\boldsymbol{W}_0)=1,\quad \bar{P}_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{N}\in\cdot)=P_{\mathrm{PRF}}^{\infty}(\cdot)$
- $\boldsymbol{W}^{\mathrm{sol}}$ の中で $\bar{P}_{\boldsymbol{x}}$ のもと $F_{\boldsymbol{x}}^{\infty}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{N})=\lim_{m\to\infty}F_{\boldsymbol{x}}^m(\boldsymbol{X},\boldsymbol{N})$

ここで, $\boldsymbol{W}^{\mathrm{sol}}$ の中で $\bar{P}_{\boldsymbol{x}}$ のもと $F_{\boldsymbol{x}}^{\infty}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{N})=\lim_{m\to\infty}F_{\boldsymbol{x}}^{m}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{N})$ であるとは, 任意の $i\in\mathbb{N}$ と $\bar{P}_{\boldsymbol{x}}$-a.s. $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{N})$ に対して, $m\to\infty$ で $F_{\boldsymbol{x}}^{m,i}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{N})\to F_{\boldsymbol{x}}^{\infty,i}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{N})$, かつ, $D([0,T],\mathbb{R}^d)$ 内で $\int_0^{\cdot}a(F_{\boldsymbol{x}}^{m}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{N}))dN_i\to\int_0^{\cdot}a(F_{\boldsymbol{x}}^{\infty}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{N}))dN_i$ となることをいう.

命題 5.2. *(B.1)* と *(B.2)* を仮定し, $\bar{P}_{\boldsymbol{x}}$ を *ISDE* (5.1) の解の分布とする.
(1) 任意の $m\in\mathbb{N}$, $i=1,2,\ldots,m$ に対し, $F_{\boldsymbol{x}}^{m,i}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{N})=F_{\boldsymbol{x}}^{m+1,i}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{N})$ となる.
(2) $\bar{P}_{\boldsymbol{x}}$ は *ISDE* (5.1) の *IFC* 解となる.
(3) $\bar{P}_{\boldsymbol{x}}$-*a.s.* $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{N})$ に対して, $(F_{\boldsymbol{x}}^{\infty}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{N}),\boldsymbol{N})=(\boldsymbol{X},\boldsymbol{N})$ となる.
(B.2) を仮定し, $\bar{P}_{\boldsymbol{x}}$ を *ISDE* (5.1) の *IFC* 解とする.
(4) $F_{\boldsymbol{x}}^{\infty}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{N})$ は $\bar{P}_{\boldsymbol{x}}$ のもと $\boldsymbol{N}$ に対して *ISDE* (5.1) の解となる.
(5) 写像 $F_{\boldsymbol{x}}^{\infty}$ は $\mathcal{T}_{\mathrm{path}}(\boldsymbol{S})\times\mathcal{B}(\boldsymbol{W}_0)$ 可測である, ただし $\mathcal{T}_{\mathrm{path}}(\boldsymbol{S})$ は $\boldsymbol{W}$ 上の末尾 σ-加法族, つまり, $\mathcal{T}_{\mathrm{path}}(\boldsymbol{S})=\bigcap_{m=1}^{\infty}\sigma(\boldsymbol{X}^{m*})$.

$\mathcal{T}_{\mathrm{path}}(\boldsymbol{S})$ が自明となる確率測度 P, つまり, 任意の $A\in\mathcal{T}_{\mathrm{path}}(\boldsymbol{S})$ に対して $P(A)\in\{0,1\}$ となる P に対して, $\mathcal{T}_{\mathrm{path}}^{[1]}(\boldsymbol{S};P)=\{A\in\mathcal{T}_{\mathrm{path}}(\boldsymbol{S});P(A)=1\}$ と定義する. また, $\bar{P}_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{N}}(\cdot)$ を $\bar{P}_{\boldsymbol{x}}(\cdot|\boldsymbol{N})$ で与えられる正則条件付き確率とする. 以下の条件を考える.
(B.3) $\mathcal{T}_{\mathrm{path}}(\boldsymbol{S})$ は $P_{\mathrm{PRF}}^{\infty}$-a.s. $\boldsymbol{N}$ に対して, $\bar{P}_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{N}}$-自明である.
(B.4) $P_{\mathrm{PRF}}^{\infty}$-a.s. $\boldsymbol{N}$ に対して $\mathcal{T}_{\mathrm{path}}^{[1]}(\boldsymbol{S};\bar{P}_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{N}})=\mathcal{T}_{\mathrm{path}}^{[1]}(\boldsymbol{S};\bar{P'}_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{N}})$ である.
(B.5) $\mathcal{T}_{\mathrm{path}}^{[1]}(\boldsymbol{S};\bar{P}_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{N}})$ は $P_{\mathrm{PRF}}^{\infty}$-a.s. $\boldsymbol{N}$ に対して $\bar{P}_{\boldsymbol{x}}$ に依存しない.
このとき, それぞれの条件に応じて次の事実を示せる.

定理 5.3 (第 1 末尾定理)**.** (1) (B.1)–(B.3) が成立するとき, *ISDE* (5.1) は強解をもつ.
(2) (B.1)–(B.4) が成立するとき, *2* つの強解 $\boldsymbol{X}$ と $\boldsymbol{X}'$ は $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}'$ *a.s.* となる.
(3) (B.1)–(B.5) が成立するとき, *ISDE* (5.1) に対して強一意性が成り立つ.

以下で, ラベル付けに対する末尾自明性は, ある意味で, 配置空間の末尾自明性から従うことを述べる. $\mathfrak{M}$ 上の末尾 σ-加法族 $\mathcal{T}(\mathfrak{M})$ を $\mathcal{T}(\mathfrak{M})=\bigcap_{r=1}^{\infty}\sigma(\pi_r^c)$ で定義する. ラベル写像 ℓ に対して道のラベル写像 $\ell_{\mathrm{path}}:D([0,T],\mathfrak{M}_{\mathrm{s.i.}})\to D([0,T],\boldsymbol{S})$ を $\Xi=\sum_{j=1}^{\infty}\delta_{X^m}\in D([0,T],\mathfrak{M}_{\mathrm{s.i.}})$ に対して $\ell(\mathfrak{M})_0=\boldsymbol{X}_0=(X_0^j)_{j\in\mathbb{N}}$ となるものとする. $D([0,T],\mathfrak{M})$ 上の確率測度 P_μ で $P_\mu\circ\Xi_0^{-1}=\mu$ となるものに対し, $\mu^\ell=\mu\circ\ell^{-1}$, $\mathbb{P}_{\mu^\ell}=P_\mu\circ\ell_{\mathrm{path}}^{-1}$ とおく. 以下を仮定する.
(C.1) $\mathcal{T}(\mathfrak{M})$ は μ-自明である.
(C.2) 任意の $t\in[0,T]$ に対して $P_\mu\circ\Xi_t^{-1}\prec\mu$ となる.
(C.3) $P_\mu(D([0,T],\mathfrak{M}_{\mathrm{s.i.}}))=1$
(C.4) 任意の $r>0$ に対し, $P_\mu(\inf_{m\in\mathbb{N}}\{X_t^n\in U_r^c,\ \forall t\in[0,T],\forall n>m\}<\infty)=1$

定理 5.4 (第 2 末尾定理)**.** (B.2) を仮定する. さらに, (C.1)–(C.4) をみたす P_μ で $\mathbb{P}_{\mu^\ell}(F_{\boldsymbol{x}}^{\infty}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{N})=\boldsymbol{X})=1$ となるものが存在することを仮定する. このとき, μ^ℓ-*a.s.* $\boldsymbol{x}$ に対し (B.1) と (B.3)–(B.5) が成り立つ.

以上の議論を基に ISDE (5.1) の解に対する結果として整理する. 以下を仮定とする.
(D.1) ISDE (5.1) は μ^ℓ-a.s. $\boldsymbol{x}$ に対して解 $\boldsymbol{X}_t=(X_t^i)_{i\in\mathbb{N}}$ をもつ.
(D.2) $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{N})$ の分布 $\bar{P}_{\boldsymbol{x}}$ は μ^ℓ-a.s. $\boldsymbol{x}$ に対して ISDE (5.1) の IFC 解である.
(D.3) 任意の $t>0$ に対し, $P_\mu\circ\Xi_t^{-1}\prec\mu$ (μ-絶対連続条件).
(D.4) 末尾 σ-加法族 $\mathcal{T}(\mathfrak{M})$ は μ-自明である.
(D.5) 任意の $r>0$ と $T\in\mathbb{N}$ に対し, $P_\mu\left(\limsup_{i\to\infty}\left\{\inf_{t\in[0,T]}|X_t^i|\le r\right\}\right)=0$ となる.

定理 5.5. (D.1)–(D.5) を仮定する．このとき，μ^{ℓ}-*a.s.* $\boldsymbol{x}$ に対して，*ISDE* (5.1) は μ-絶対連続条件をみたす強解をもち，その解に対し強一意性が成立する．

注意 5.6. 任意の x と q.e. ξ に対して，$\int_{U_1^c} c(\xi, x, x+u)du < \infty$，かつ，q.e. ξ に対して $\int_{U_1} c(\xi, x, x+u)u^2du$ が x について Lipschitz 連続であるとき (D.2) は成立する．

μ が末尾自明でない場合は，$\mu(\cdot) = \int_{\mathfrak{M}} \mu_{\mathrm{Tail}}^{\eta}(\cdot)\mu(d\eta)$ と分解する．ここで $\mu_{\mathrm{Tail}}^{\eta}$ を末尾 σ-加法族による正則条件付き確率測度である．このとき，$\mu_{\mathrm{Tail}}^{\eta}$ に対する条件 (D.1)–(D.3) をそれぞれ (D.1-η)–(D.3-η) とかく．

定理 5.7. (D.1-η)–(D.3-η) を仮定する．このとき，μ-*a.s.* η に対して，$(\mu_{\mathrm{Tail}}^{\eta})^{\ell}$-*a.s.* η に対する，*ISDE* (5.1) は $\mu_{\mathrm{Tail}}^{\eta}$-絶対連続条件をみたす強解をもち，その解に対して強一意性が成立する．

参考文献

[1] S. Esaki: Infinite particle systems of long range jumps with long range interactions, to appear in Tohoku Mathematical Journal.

[2] R. Honda and H. Osada: Infinite-dimensional stochastic differential equations related to Bessel random point fields, Stochastic Process. Appl. 125 (2015), no. 10, 3801–3822.

[3] Y. Kondratiev, E. Lytvynov and M. Röckner: Equilibrium Kawasaki dynamics of continuous particle systems. Infin. Dimen. Anal. Quant. Prob. Rel. Top. 10 (2007), no.2, 185–209.

[4] E. Lytvynov and N. Ohlerich: A note on equilibrium Glauber and Kawasaki dynamics for fermion point processes. Methods Funct. Anal. Topol- ogy 14 (2008), no. 1, 67–80.

[5] H. Osada: Dirichlet form approach to infinite-dimensional Wiener processes with singular interactions, Commun. Math. Phys. 176, 117–131 (1996).

[6] H. Osada: Tagged particle processes and their non-explosion criteria, J. Math. Soc. Japan, 62, No. 3, 867-894 (2010).

[7] H. Osada: Infinite-dimensional stochastic differential equations related to random matrices, Probability Theory and Related Fields, 153, 471–509 (2012).

[8] H. Osada: Interacting Brownian motions in infinite dimensions with logarithmic interaction potentials, Ann. of Probab. 41, 1–49 (2013).

[9] H. Osada: Interacting Brownian motions in infinite dimensions with logarithmic interaction potentials II : Airy random point field, Stochastic Processes and their applications 123, 813–838 (2013).

[10] H. Osada and H. Tanemura: Infinite-dimensional stochastic differential equations and tail σ-fields, arXiv:1412.8674.